Introducción a la Macroeconomía

Profesor: J. Marcelo Ochoa

Otoo 2007

El modelo de Solow y algunas extensiones

1. ¿Cuán rápido se acerca la economía a su senda de crecimiento balanceado?

En clases analizamos el crecimiento balanceado matemáticamente pero dejamos de lado el ajuste de una economía que se encuentra fuera de la senda de crecimiento balanceado de estado estacionario. En esta nota se desarrolla el modelo más formalmente, y deriva expresiones para el crecimiento del producto por trabajador y el ratio capital-trabajo, y analiza la dinámica del modelo.

Si tienes una buena base en matemáticas, encontrarás en esta nota un tratamento más formal a lo que hemos visto en clases hasta ahora. Si no tienes una buena base, esta nota te debería incentivar a estudiar!

1.1. Reglas de derivación importantes

Utilizamos la notación de cálculo en la que $\frac{\partial y}{\partial x}$ se entiendo como la magnitud que la variable y cambia en respuesta a un cambio en x. Por lo tanto si,

$$y = A \times x^{\alpha}$$

entonces,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha A \times x^{\alpha - 1}$$

Por otro lado si y varía en el tiempo, es decir, depende del tiempo:

$$\frac{\partial y_t}{\partial t}$$

es la variación de y_t a través del tiempo. De manera más simple,

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} \approx y_{t+1} - y_t$$

Mientras que la variación proporcional o porcentual de y_t es,

$$\frac{1}{y_t}\frac{\partial y_t}{\partial t} \approx \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t}$$

Finalmente, si sabemos que tanto y como x dependen de un tercer factor como el tiempo, t, por la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} = \frac{\partial y_t}{\partial x_t}\frac{\partial x_t}{\partial t} = \alpha A \times x^{\alpha - 1}\frac{\partial x_t}{\partial t}$$

1.2. Principales relaciones del modelo de Solow

La función de producción está dada por:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} \times E_t^{1-\alpha} \tag{1}$$

El trabajo y la eficiencia en la economía crecen a una tasa constante igual a:

$$\frac{1}{L_t}\frac{\partial L_t}{\partial t} = n \tag{2}$$

$$\frac{1}{E_t}\frac{\partial E_t}{\partial t} = g \tag{3}$$

Mientras que el capital crece con la nueva inversión menos el capital depreciado,

$$\frac{\partial K_t}{\partial t} = sY_t - \delta K_t \tag{4}$$

1.3. Evolución del producto

La función de producción 1 se puede escribir como:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(L_t \times E_t)^{1-\alpha}$$

La variación del producto a tavés del tiempo está dada por:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial t} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t} + \frac{\partial Y_t}{\partial L_t}\frac{\partial L_t}{\partial t} + \frac{\partial Y_t}{\partial E_t}\frac{\partial E_t}{\partial t} \tag{5}$$

La variación del producto ante cambios en los factores de producción está dada por:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha K_t^{\alpha-1}(L_t \times E_t)^{1-\alpha} = \alpha\frac{Y_t}{K_t} \tag{6}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha)K_t^{\alpha}E_t^{1-\alpha}L_t^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t} \tag{7}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial E_t} = (1-\alpha)K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}E_t^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{E_t} \tag{8}$$

Reemplazando tanto 7, 6 y 8 en 5 obtenemos:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial t} = \alpha\frac{Y_t}{K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t} + (1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t}\frac{\partial L_t}{\partial t} + (1-\alpha)\frac{Y_t}{E_t}\frac{\partial E_t}{\partial t} \tag{9}$$

Noten que si dividimos 9 por Y_t tenemos,

$$\frac{1}{Y_t}\frac{\partial Y_t}{\partial t} = \alpha\left(\frac{1}{K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{1}{L_t}\frac{\partial L_t}{\partial t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{1}{E_t}\frac{\partial E_t}{\partial t}\right) \tag{10}$$

En 9, $\frac{1}{L_t}\frac{\partial L_t}{\partial t}$ es la tasa de crecimiento de la población, mientras que $\frac{1}{E_t}\frac{\partial E_t}{\partial t}$ es la tasa de crecimiento de la eficiencia, por lo tanto:

$$\frac{1}{Y_t}\frac{\partial Y_t}{\partial t} = \alpha\left(\frac{1}{K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t}\right) + (1-\alpha)n + (1-\alpha)g$$

$$\alpha\left(\frac{1}{K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t}\right) + (1-\alpha)(n+g) \tag{11}$$

1.4. Evolución del capital

El capital crece con la nueva inversión menos el capital depreciado,

$$\frac{\partial K_t}{\partial t} = sY_t - \delta K_t \tag{12}$$

Por lo que el capital crece ana tasa igual a:

$$\frac{1}{\partial K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t} = s\frac{Y_t}{K_t} - \delta \tag{13}$$

1.5. Evolución de ratio capital-producto

Llamemos al ratio capital producto $\kappa_t = \frac{K_t}{Y_t}$. La tasa de variación del ratio capital-producto está dada por:

$$\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} = \frac{\partial \kappa_t}{\partial K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t} + \frac{\partial \kappa_t}{\partial Y_t}\frac{\partial Y_t}{\partial t} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{Y_t}\frac{\partial K_t}{\partial t} - \frac{K_t}{Y_t^2}\frac{\partial Y_t}{\partial t} \tag{15}$$

Si dividimos ambos lados por $\kappa_t = \frac{K_t}{Y_t}$, obtenemos,

$$\frac{1}{\kappa_t}\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} = \frac{1}{K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t} - \frac{1}{Y_t}\frac{\partial Y_t}{\partial t} \tag{16}$$

Reemplazando el crecimiento proporcional del producto 11 y el crecimiento proporcional del capital 13 en 16 obtenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa_t}\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} &= \frac{1}{K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t} - \alpha\left(\frac{1}{K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t}\right) - (1-\alpha)(n+g) \\
&= (1-\alpha)\frac{1}{K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t} - (1-\alpha)(n+g) \\
&= (1-\alpha)\left(\frac{1}{K_t}\frac{\partial K_t}{\partial t} - (n+g)\right) \\
&= (1-\alpha)\left(s\frac{Y_t}{K_t} - \delta - (n+g)\right) \\
&= (1-\alpha)\left(\frac{s}{\kappa_t} - \delta - (n+g)\right)
\end{aligned}$$

Si despejamos la evolución de κ_t tenemos,

$$\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} = (1-\alpha)\left(s - (\delta+n+g)\kappa_t\right)$$

En la senda de crecimiento balanceado el ratio capital producto es constante, por lo que

$$\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} = 0$$

Si llamamos κ^* al ratio capital producto de equilibrio, tenemos que:

$$(1-\alpha)\left(s - (\delta+n+g)\kappa^*\right) = 0$$

ó,

$$\kappa^* = \frac{s}{\delta+n+g} \tag{17}$$

¿Cuál es la evolución de κ_t? Si utilizamos 17 noten que,

$$\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} = (1-\alpha)(\delta+n+g)\left(\frac{s}{\delta+n+g} - \kappa_t\right) \tag{18}$$

$$= (1-\alpha)(\delta+n+g)\left(\kappa^* - \kappa_t\right) \tag{19}$$

Esta ecuación nos muestra la tasa a la que se ajusta κ fuera del estado esatcionario hacia κ^*. Por ejemplo, si el ratio capital-producto está por encima de su nivel de equilibrio entonces,

$$\kappa^* < \kappa_t$$

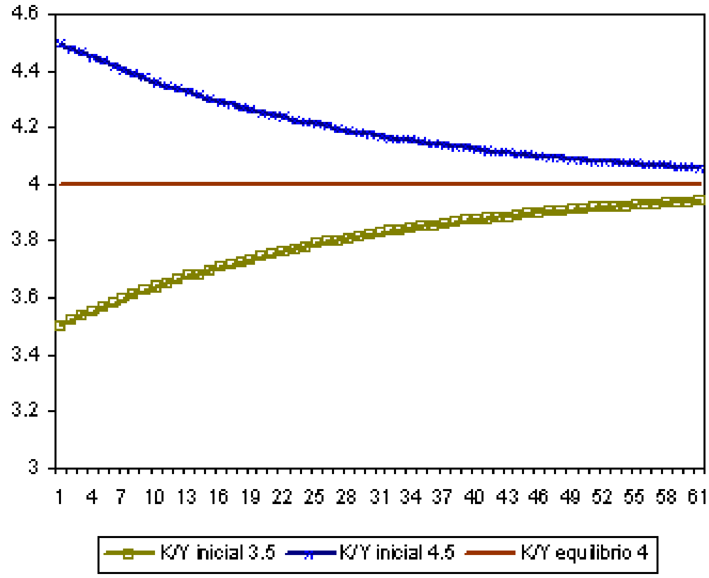

Figura 1: Evolución del ratio capital-producto κ hacia el estado estacionario desde diferentes niveles iniciales de κ

ó,

$$\kappa^* - \kappa_t < 0$$

Dado que $(1-\alpha)(\delta+n+g) > 0$, la tasa de variación del ratio capital-producto es negativa,

$$\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} < 0$$

De la misma manera, si el ratio capital-producto está por debajo de su nivel de equilibrio entonces,

$$\kappa^* > \kappa_t$$

ó,

$$\kappa^* - \kappa_t > 0$$

Dado que $(1-\alpha)(\delta+n+g) > 0$, la tasa de variación del ratio capital-producto es positiva,

$$\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} > 0$$

¿A qué velocidad se acerca el ratio capital-producto a su nivel de equilibrio? El término $(1-\alpha)(\delta+n+g)$ es el total de la brecha que se cierra cada periodo (ver Figura 1.5).

Ejemplo: Suponga que $s = 0{,}28$, $n = 0{,}02$, $g = 0{,}015$, $\delta = 0{,}035$, y $\alpha = 0{,}5$. El ratio capital-producto de estado estacionario es,

$$\kappa^* = \frac{0{,}28}{0{,}02+0{,}015+0{,}035} = 4$$

Mientras que,

$$(1-\alpha)(\delta+n+g) = 0{,}5 * (0{,}02+0{,}015+0{,}035) = 0{,}035$$

Si $\kappa_0 = 2$, entonces el capital aumentará en $0{,}035 \times (4-2) = 0{,}07$, por lo que $\kappa_1 = 2{,}7$. Siguiendo esta lógica podemos llenar la siguiente tabla:

Periodo t	κ_t	$\frac{\partial \kappa_t}{\partial t}$	κ^*
0	2.00	0.070	4
1	2.07	0.067	4
2	2.14	0.065	4
3	2.20	0.063	4

1.6. Evolución del capital por trabajador Y/L

Ahora estamos en la posición de calcular la tasa de crecimiento del producto por trabajador. Recuerden que el producto por trabajador se puede expresar como,

$$\frac{Y_t}{L_t} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\alpha E_t^{1-\alpha} = \left(\frac{K_t}{L_t} \times \frac{Y_t}{Y_t}\right)^\alpha E_t^{1-\alpha} \qquad = \left(\frac{K_t}{Y_t} \times \frac{Y_t}{L_t}\right)^\alpha E_t^{1-\alpha} = \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^\alpha \left(\frac{Y_t}{L_t}\right)^\alpha E_t^{1-\alpha}$$

que se puede expresar como,

$$\frac{Y_t}{L_t}^{1-\alpha} = \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^\alpha E_t^{1-\alpha}$$

Despejando $\frac{Y_t}{L_t}$ obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{Y_t}{L_t} &= \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} E_t \\ &= \kappa_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} E_t\end{aligned}$$

Por lo que la tasa de crecimiento del producto por trabajador es igual a,

$$\frac{\partial \frac{Y_t}{L_t}}{\partial t} = \frac{\partial \frac{Y_t}{L_t}}{\partial \kappa_t}\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} + \frac{\partial \frac{Y_t}{L_t}}{\partial E_t}\frac{\partial E_t}{\partial t} \tag{20}$$

Noten que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \frac{Y_t}{L_t}}{\partial \kappa_t} &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\kappa_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} E_t \\ \frac{\partial \frac{Y_t}{L_t}}{\partial E_t} &= \kappa_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en 20,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \frac{Y_t}{L_t}}{\partial t} &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\kappa_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} E_t \frac{\partial \kappa_t}{\partial t} + \kappa_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{\partial E_t}{\partial t} \\ &= \kappa_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} E_t \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\kappa_t}\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} + \frac{1}{E_t}\frac{\partial E_t}{\partial t}\right) \\ &= \frac{Y_t}{L_t}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{(1-\alpha)(\delta+n+g)\,(\kappa^*-\kappa_t)}{\kappa_t} + g\right) \\ &= \frac{Y_t}{L_t}\left(\alpha(\delta+n+g)\left(\frac{\kappa^*-\kappa_t}{\kappa_t}\right) + g\right)\end{aligned}$$

Finalmente, el crecimiento relativo del producto por trabajador es igual a,

$$\frac{1}{\frac{Y_t}{L_t}}\frac{\partial \frac{Y_t}{L_t}}{\partial t} = \alpha(\delta+n+g)\left(\frac{\kappa^*-\kappa_t}{\kappa_t}\right) + g \tag{21}$$

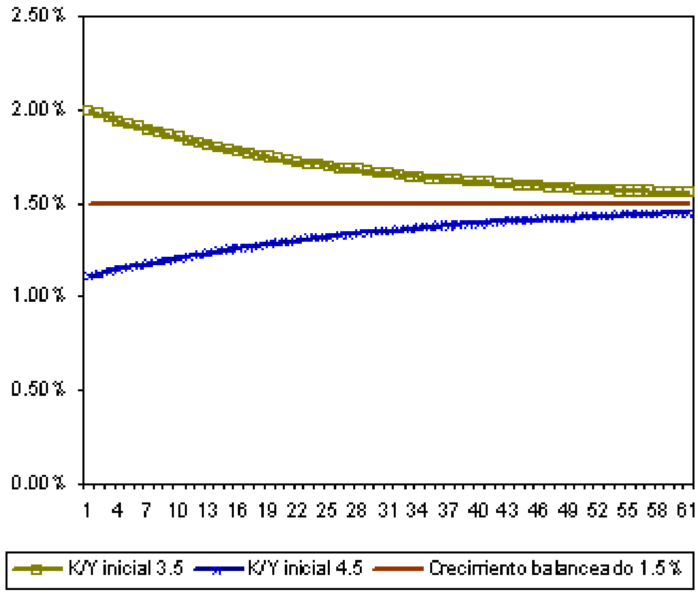

Figura 2: Evolución de la tasa de crecimiento del producto por trabajador hacia el estado estacionario desde diferentes niveles iniciales de κ_t inicial

En equilibrio cuando el ratio capital-producto alcanza su nivel de estado estacionario, $\kappa_t = \kappa^*$, el crecimiento del producto por trabajador es igual a,

$$\frac{1}{\frac{Y_t}{L_t}} \frac{\partial \frac{Y_t}{L_t}}{\partial t} = g$$

En cambio, si el ratio capital-producto está por encima de su nivel de equilibrio entonces,

$$\kappa^* < \kappa_t$$

ó,

$$\kappa^* - \kappa_t < 0$$

Dado que $\alpha(\delta + n + g) > 0$, la tasa de variación del producto por trabajador es menor que g. De la misma manera, si el ratio capital-producto está por debajo de su nivel de equilibrio entonces,

$$\kappa^* > \kappa_t$$

ó,

$$\kappa^* - \kappa_t > 0$$

por lo tanto, la tasa de variación del porducto por trabajador se encuentra por encima de g (ver Figura 1.6).

2. Síntesis del modelo de Solow

Las relaciones que deben recordar del modelo son:

$$\frac{1}{L_t}\frac{\partial L_t}{\partial t} = n \tag{22}$$

$$\frac{1}{E_t}\frac{\partial E_t}{\partial t} = g \tag{23}$$

$$\kappa^* = \frac{s}{\delta + n + g} \tag{24}$$

$$\frac{\partial \kappa_t}{\partial t} = (1-\alpha)(\delta + n + g)\left(\kappa^* - \kappa_t\right) \tag{25}$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = \kappa_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} E_t \tag{26}$$

$$\frac{1}{\frac{Y_t}{L_t}}\frac{\partial \frac{Y_t}{L_t}}{\partial t} = \alpha(\delta + n + g)\left(\frac{\kappa^* - \kappa_t}{\kappa_t}\right) + g \tag{27}$$